

基于Liutex的涡动力学初探

Liutex-based vortex dynamics: A preliminary study

王义乾

苏州大学 数学科学学院

2021年1月5日



主要内容





一、引言

涡(Vortex)是流体运动普遍存在的一种形态!



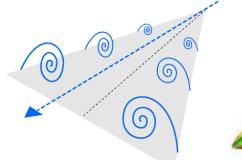
龙卷风



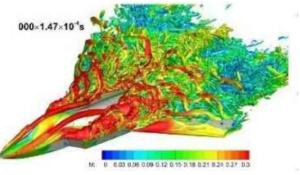
宇宙星云



翼尖涡



大后掠三角翼涡升力



边条翼战斗机数值模拟



直升机旋翼数值模拟。

"涡是流体运动的肌腱"——Küchemann (1965) |



涡与湍流

- 湍流由各种尺度不同的涡 (涡包)构成。
 - ◆ 基本单元
 - · 马蹄涡; Theodorsen, 1953
 - 发卡涡: 湍流边界层基本流动结构;

Smith et al., 1991

• 概念模型(Conceptual Models)

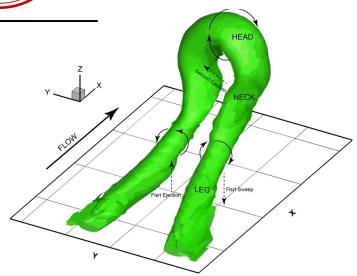
Robinson, 1991

• 涡包结构 (Vortex Packets)

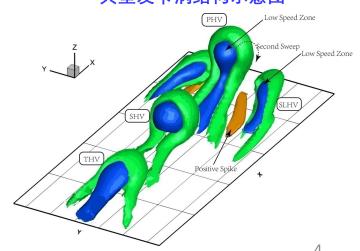
Adrian, 2007

- ◆ 湍流近壁自维持循环
- 低速条带
- 近壁流向涡

Jiménez, 1999 Schoppa & Hussain., 2002



典型发卡涡结构示意图



典型发卡涡涡包结构示意图

4



- 1. 涡是流体研究中无法绕开的一个问题;
- 2. 但涡的定义和识别仍是一个开放的问题!

Lugt (1979) 的定义:

涡是流体围绕一个共同中心所做的旋转运动。

Robinson(1991)的定义:

站在与涡核一起运动的参考坐标系上观察,当瞬时流线投影到垂直于涡轴线的平面上时,如果投影流线呈现出环状或者螺旋状,则代表当地存在涡结构。

缺陷:要求先验地给出涡核位置和方向,不易应用。



- 1. 一般采用涡量(第一代)、Q准则、 Δ 准则、 λ_{ci} 准则、 λ_2 准则(第二代)的等值面来识别流场的涡结构;
 - Q method: Hunt, Wray & Moin 1988, cited by 3232;
 - Δ method: Chong & Perry 1990, cited by 1783;
 - λ_{ci} method: Zhou, Adrian, Balachandar et al. 1999, cited by 1801;
 - λ_2 method: Jeong & Hussain 1995, cited by 5682;
 - Ω method: Liu, Wang, Yang et al. 2016, cited by 122
- 2. 由美国德州大学阿灵顿分校Chaoqun Liu教授所倡导提出了一种新的涡识别和定义方法(第三代): Rortex/Liutex向量。
 - 2018年至2019年间,UTA团队在Physics of Fluids上发表了15篇论文,在Journal of Hydrodynamics上发表14篇论文;
 - 得到了周连第主编及水动力学研究与进展和各大团队的大力支持!



二、常见涡识别方法

第一代基于涡量的涡识别方法

- 涡量定义为速度矢量的旋度, 即: $\omega \equiv \nabla \times V$
- 一般根据流体微团的运动分析,将涡量理解为流体微团 绕其中心作刚体旋转角速度的2倍,可认为其理论基础来 自于Cauchy-Stokes分解;
- 讨论Cauchy-Stokes分解的合理性:

$$\nabla V = \frac{1}{2} (\nabla V + \nabla V^T) + \frac{1}{2} (\nabla V - \nabla V^T) \equiv A + B$$

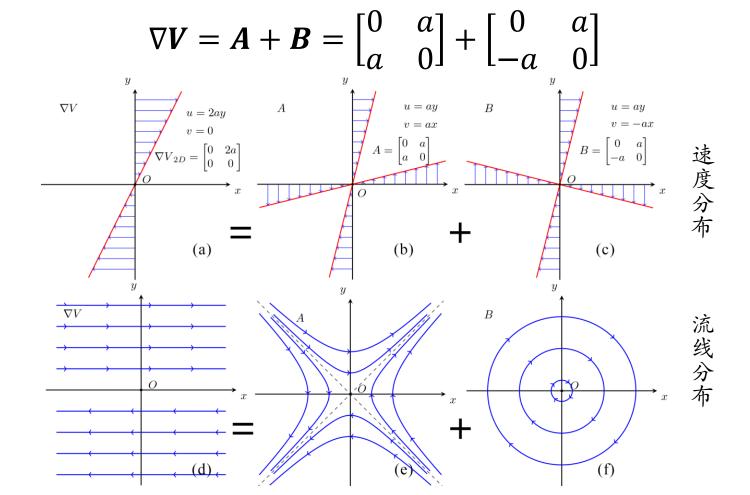
$$V(r + dr) = V(r) + \nabla V dr = V(r) + A dr + B dr$$

$$V(r + dr) = V(r) + A dr + \frac{1}{2} \omega \times dr$$

进而将流体微团运动分解为平移、变形和刚体旋转

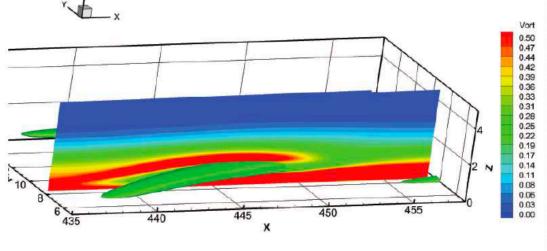


二维均匀剪切层 $\partial u/\partial y = 2a \ (a > 0)$ 的Cauchy-Stokes分解:





- 在湍流边界层中,尤其是在壁面附近,涡量集中的区域 与涡结构之间的关系相当微弱 (Robinson, 1991)。
- 在边界层转捩中发现,相较于邻近区域,Λ涡反而在涡 核处涡量较小。



 Λ vortex and shear layer

Y. Wang, Y. Yang, G. Yang and C. Liu, "DNS study on vortex and vorticity in late boundary layer transition," Comm. Comp. Phys. 22, 441-459 (2017).



第二代标量涡识别方法

■ Q方法

当速度梯度张量 ∇V 的第二个伽利略不变量Q > 0时,当地存在涡结构 (Hunt et al., 1988)

$$Q = \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{B}\|_F^2 - \|\boldsymbol{A}\|_F^2)$$

- || ||²代表矩阵的Frobenius范数。
- 一般认为其物理意义是Q代表涡量大小和应变速率张量 之间的平衡;
- 反对称张量B需要能克服对称张量A的抵消效果,才能代表当地流体旋转;
- 可以将Q方法理解为对Cauchy-Stokes分解的一个修正。10



■ λ₂方法

- 当流场存在较强的非定常和粘性效应时,使用平面内 压强极小值捕捉涡结构的方法失效。
- 忽略不可压缩Navier-Stokes方程中的非定常和粘性项, 可以得到

$$A^2 + B^2 = -\nabla(\nabla p)/\rho$$

- 当对称张量A² + B²存在两个负的特征值时,压强在这两个负特征值所对应特征向量张成的平面内为极小值。
- 如果将 $A^2 + B^2$ 的特征值按 $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ 排列, $A^2 + B^2$ 存在两个负特征值的条件等价于 $\sigma_2 < 0$,即将涡定义为 $\sigma_2 < 0$ 的区域。



• 同样可以从A和B旋转作用相互抵消的角度理解λ2方法:

$$Q = \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{B}\|_F^2 - \|\boldsymbol{A}\|_F^2) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2) = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

 取a为任意方向的单位向量,则a·A²a和a·B²a可以代表 a方向上A和B的平衡,

$$Q = -\frac{3}{2S} \int \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2) \boldsymbol{a} dS$$

- Q方法要求所有方向的平均上B超过A
- 忽略常系数的影响,Q方法使用 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 的算数平均值代表A和B的平衡,而 λ_2 方法使用 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 的中位数代表A和B的平衡。

12



■△方法

- 对于3×3的矩阵而言, ∇V 的特征值存在两种情况: (1) 三个实特征值; (2) 一个实特征值和一对复共轭特征值。
- 当VV存在一对复共轭特征值时,代表瞬时流线具有闭合或者螺旋型的形式。

 ∇V 特征方程 $\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0$

判別式
$$\Delta = -\frac{1}{108}P^2Q^2 - \frac{1}{6}PQR + \frac{1}{27}P^3R + \frac{1}{27}Q^3 + \frac{1}{4}R^2$$

- 如果 $\Delta \leq 0$, 则 ∇V 的三个特征值均为实数;
- 如果△>0,则Ⅵ√有一个实特征值和一对共轭复特征值。



■ λ_{ci}方法

- λ_{ci} 方法是对 Δ 方法的进一步发展;
- 当 ∇V 有一个实特征值和一对共轭复特征值,即 $\Delta > 0$ 时,设其特征值为 $\lambda_1 = \lambda_r$, $\lambda_{2,3} = \lambda_{cr} \pm i\lambda_{ci}$,对应的特征向量分别为 $v = v_r$, $v_{2,3} = v_{cr} \pm iv_{ci}$ 。
- 则在 v_r 、 v_{cr} 和 v_{ci} 张成的当地曲面坐标系 (c_1, c_2, c_3) 下,瞬时流线有如下形式

$$\begin{cases} c_1(t) = c_1(0) e^{\lambda_r t} \\ c_2(t) = [c_2(0) \cos(\lambda_{ci} t) + c_3(0) \sin(\lambda_{ci} t)] e^{\lambda_{cr} t} \\ c_3(t) = [c_3(0) \cos(\lambda_{ci} t) - c_2(0) \sin(\lambda_{ci} t)] e^{\lambda_{cr} t} \end{cases}$$

• 根据式中的正弦和余弦函数,其运动具有伪时间周期 $2\pi/\lambda_{ci}$,也就是说 λ_{ci} 是伪时间上的平均角速度,在 λ_{ci} 方法中称之为旋转强度。



■ 存在的问题

- 1. 几种方法参数的物理意义不清晰, 互不相同, 且量纲不一, 都模糊的代表"旋转强度";
- 2. 作为标量涡识别方法,基本上都采用等值面的方式代表流场涡结构,需要人为给定阈值;
- 3. 都存在剪切污染问题,即在纯剪切流动中(例如, 层流边界层),仍会识别出涡结构;
- 涡旋运动是有旋转轴的,几种标量涡识别方法都无 法给出(当地/全局)旋转轴;
- 5. 无法给出一个新的流体运动分解,即在分解得到刚体旋转部分后,残余部分(剪切和拉伸/压缩)不会抵消旋转。



■ Ω 方法 (2016年)

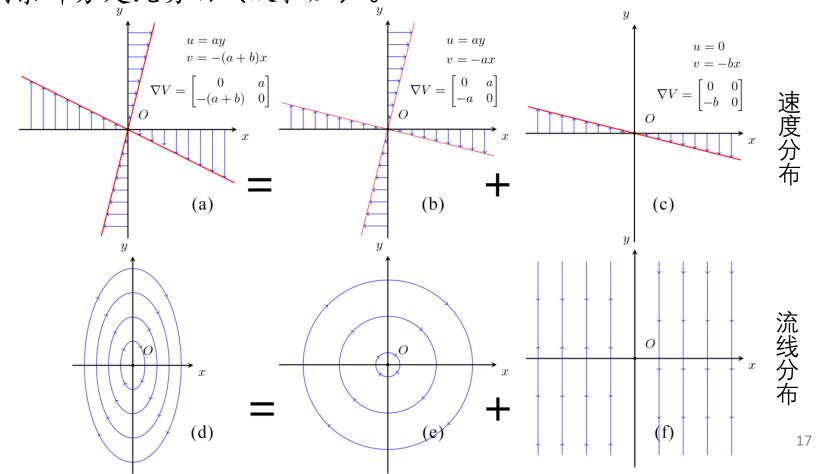
$$\Omega = \frac{\|\boldsymbol{B}\|_F^2}{\|\boldsymbol{A}\|_F^2 + \|\boldsymbol{B}\|_F^2 + \varepsilon}$$

- · ε是为了防止零除问题而添加的一个小的正数;
- 显然 $0 \le \Omega \le 1$,可以将其理解为涡量的浓度,或者流体运动的刚性。当 $\Omega = 1$ 时,代表流体做刚体旋转;
- 当 $\Omega > 0.5$ 时代表反对称张量B相对于对称张量A占优,因此可以采用 Ω 略大于0.5(例如0.52)作为涡识别的判据;
- 克服了需要人工选择阈值的问题。
- 明确提出了需要将涡量进一步分解为旋转部分和非旋转部分的概念。

三、Liutex涡定义



第三代涡识别方法Liutex/Rortex要求分解后,得到刚性旋转后的剩余部分是纯剪切(及拉压)。





- Liutex向量的方向为速度梯度张量 ∇V 存在一实二复特征值时,实特征值 λ_r 对应的单位实特征向量方向 ν_r ;
- 其物理意义是,在实特征方向 v_r 上只有拉伸和压缩,所存在的旋转运动只能位于垂直于 v_r 的平面内;
- 因为 v_r 和 $-v_r$ 都是 λ_r 对应的单位实特征向量,通过要求 $\omega \cdot v_r > 0$ 来唯一确定Liutex向量的方向;
- 其方向代表当地旋转轴,而大小代表刚体旋转部分角速度的2倍。



存在一个主坐标系,其Z轴指向当地旋转轴的方向,并且旋转平面内X轴和Y轴方向的拉伸或压缩相同,在主坐标系下,速度梯度张量具有如下形式: Γλm -φ 01

量具有如下形式:
$$\nabla V^* = \begin{bmatrix} \lambda_{cr} & -\phi & 0 \\ \phi + s & \lambda_{cr} & 0 \\ \xi & \eta & \lambda_r \end{bmatrix}$$

• 进而在主坐标系下有:

$$\nabla V^* = \begin{bmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{cr} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{cr} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ \xi & \eta & 0 \end{bmatrix} \equiv R + C + S$$

- R代表刚体旋转部分, C代表三个主坐标轴方向的拉伸和压缩, 而S代表纯剪切。
- ϕ Liutex向量的大小 $R=2\phi$, 进而将Rortex向量定义为R=Rr。



· 在主坐标系下, Liutex向量和涡量具有如下关系:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \eta \\ -\xi \\ 2\phi + s \end{bmatrix} \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\phi \end{bmatrix} \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \eta \\ -\xi \\ s \end{bmatrix}$$

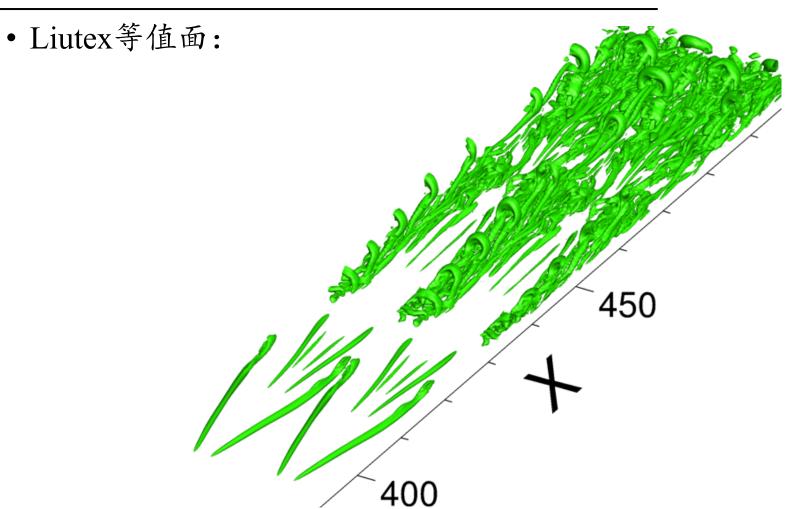
$$\nabla \boldsymbol{V}^* = \begin{bmatrix} \lambda_{cr} & -\phi & 0 \\ \phi + s & \lambda_{cr} & 0 \\ \xi & \eta & \lambda_r \end{bmatrix}$$

$$\nabla V^* = \begin{bmatrix} \lambda_{cr} & -\phi & 0 \\ \phi + s & \lambda_{cr} & 0 \\ \xi & \eta & \lambda_r \end{bmatrix}$$

- 即涡量ω可以分解为代表刚体旋转部分的R和代表纯剪切部分的S;
- ·由于w和R是伽利略不变量,该分解可以直接投影到原坐标系下。
- Kolář & Šístek (2019)的研究发现, 在现有的涡识别方法中, 只有 Liutex向量不因轴向拉伸或压缩而导致判据失效。
- · Liutex向量代表流体运动的刚体旋转部分,而其他涡识别方法都存 在不同程度的剪切污染。



基于Liutex的涡识别



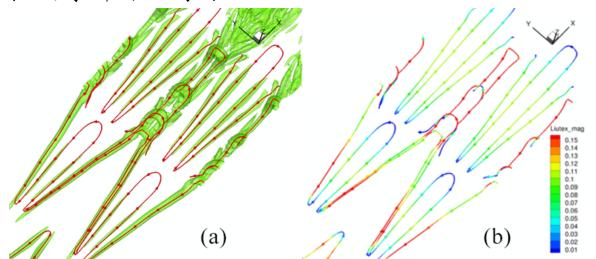
边界层转捩过程中的Liutex等值面(R=0.1)



基于Liutex的涡识别

- Liutex- Ω 方法: 结合Rortex向量和 Ω 涡识别方法的思想;
- Liutex涡核线:
 - ▶可以根据Rortex向量定义Rortex线,即流场中处处与Rortex向量相切的曲线。
 - ▶研究发现, Rortex线往往与涡结构具有相同的走向, 进而流场中存在特殊的Rortex线, 可以代表涡结构的旋转核心, 即涡核。

 \triangleright 寻找种子点的条件可以写为: $\nabla R \times r = 0 \& R > 0$





涡识别六大要素

由JHD主编周连第教授首先提出,作为涡识别方法的试金石:

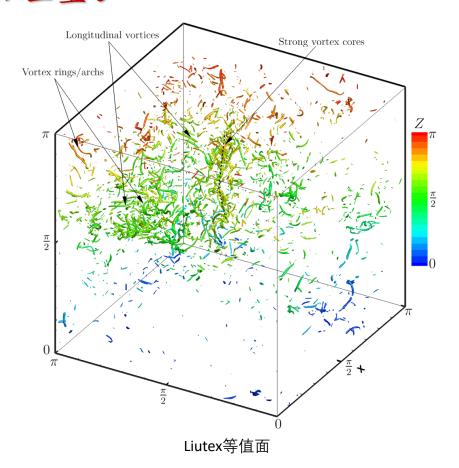
- 1. 绝对强度即为Liutex向量的大小R, 代表当地流体运动刚体旋转部分角速度的二倍;
- 2. 相对强度由Liutex-Ω方法衡量,代表当地流体的刚性;
- 3. 当地旋转轴即为Liutex向量的方向r,由速度梯度张量 ∇V 的实特征向量决定:
- 4. 涡核中心即为Liutex涡核线,首先根据 $\nabla R \times r = 0 \& R > 0$ 的条件找到种子点,再通过种子点作Liutex线;
- 5. 涡核大小可以按从涡核中心处相对强度减少至涡核处的95%确定;
- 6. 涡边界指流场中涡区和非涡区的边界,可以利用 $\Omega_R=0.52$ (Rortex- Ω 方法的参数)的等值面来代表涡边界。

23

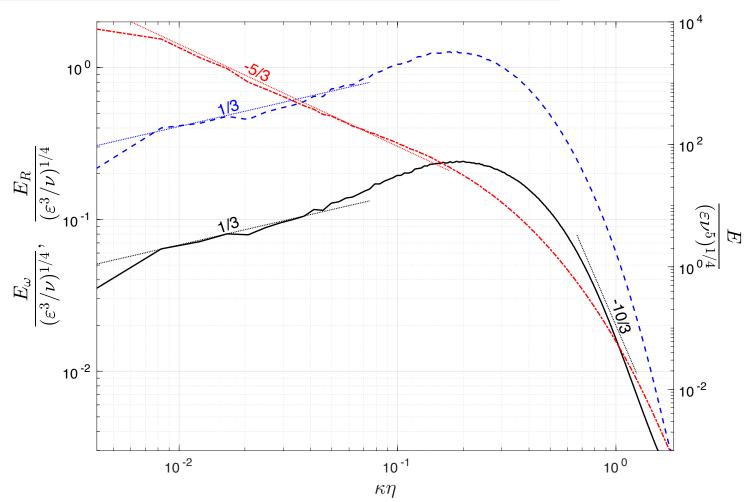




Liutex能谱具有幂次相似律证明Liutex是描述流场结构的一个物理量。

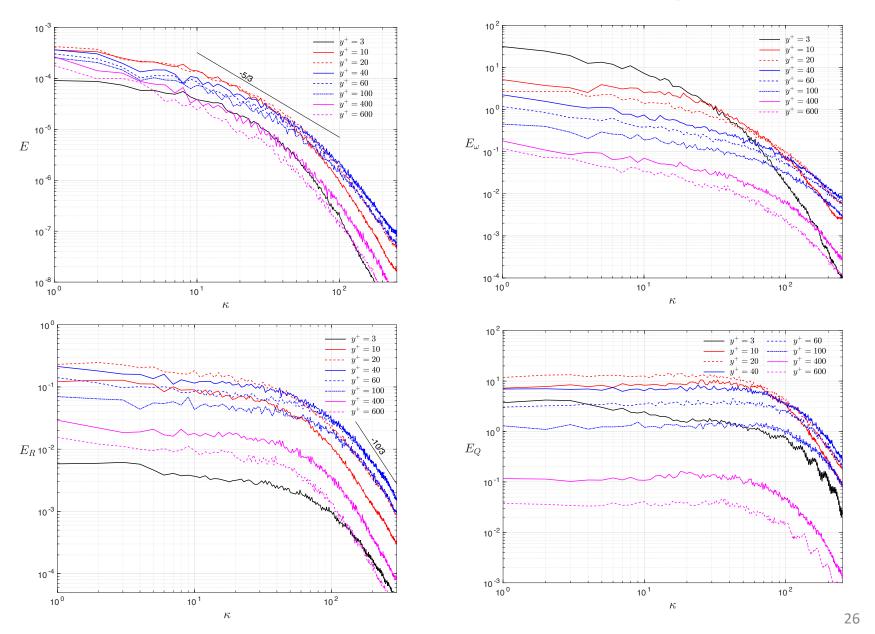






均匀各向同性湍流中Liutex谱和湍能谱

槽道湍流中不同壁面高度处的能谱





四、涡动力学初探

思想来源(idea):



周连第

各位同仁:

衷心感谢各位同仁参加Liutex涡动力学研究与发展沙龙。本人鉴于以往曾用力场模型研究过船体和螺旋桨相互作用问题,受其启发,提出Liutex涡动力学涡力场模型设想(见附件)。这一模型特点在于不需复杂的理论推导,简单实用。但能否为构建Liutex涡动力学理论提供方向和思路,与各位同仁探讨。抛砖引玉,希望通过此沙龙,大家广开思路,畅所欲言,推动Liutex涡动力学理论的发展,谢谢!



关于Liutex涡动力学涡力场模型建立的思考

周连第

1、基本思想

涡动力学涡力场模型的基本思想是不再把涡识别作为流场计算的后处理工具,涡也不再视为流场中的流动结构,而是把涡视为一个驱动力,对流动施加力的作用。研究涡如何对流动产生作用就是涡动力学涡力场模型。具体来讲,就是把涡这一驱动力(F_L)作为源项放在计算流场的控制方程RANS方程或LES方程的右端项,对流场产生驱动作用。力场模型的关键问题就是这个涡力场计算。

2、涡力场计算

力有三大要素:大小、方向和位置。涡力场可以从涡的六大要素中提取。

注:涡的六大要素为涡的相对强度、涡的绝对强度、涡旋转轴 方向、涡核位置、涡核大小、涡边界。



- (1) 在做螺旋桨、旋翼计算时,为了减少计算量,我们往往通过激励盘来建立力场模型,代替螺旋桨对流场的作用;那么类似的建立涡力场模型的目的是什么?是为了减少计算量,还是为了分析物理过程,是否可以与激励盘力场模型作类比?
- (2) 涡核大小定义在局部最大强度的98%所占区域这一定义是清晰明确的,将其应用于集中涡或者涡结构相对简单的流动情况中应该不存在很大的难度,但当涡结构较为复杂时,尤其是在湍流中,很难比较系统的得到流动中的涡核区域。但如果我们关心流动中特定的较大的涡结构,并且想要对其进行控制的话,捕捉其涡核区域应该还是可以做到的。
- (3) Liutex实际上是当地刚体旋转角速度,旋转就对应着向心加速度,加速度对应着力,当然这里面还需要解决一个旋转半径的问题。我觉得可以从这个角度对流场的涡结构进行控制,比如流动中存在一个危害比较大的、或者对流动比较有益的集中涡,那我们可以通过建立Liutex力场模型来减弱或者增强这一特定的涡。



研究目的和思路

目的:

- 1. Liutex力驱动流场,用Liutex力来模拟流场(去掉原有物体),能否模拟出原始的流场?
- 2. 用Liutex力控制流场的涡结构,来引申出流场的涡动力学。 思路:
- 1. 通过涡的六大要素,阻碍或促进涡的旋转运动;
- 2. 控制向心力。



孟州大学

SOOCHOW UNIVERSITY

向心力模型



由 $p_1 ds - p_2 ds$ 来提供流体旋转运动所需的向心力,因此 $p_1 > p_2$,越靠近旋转中心压强越低。

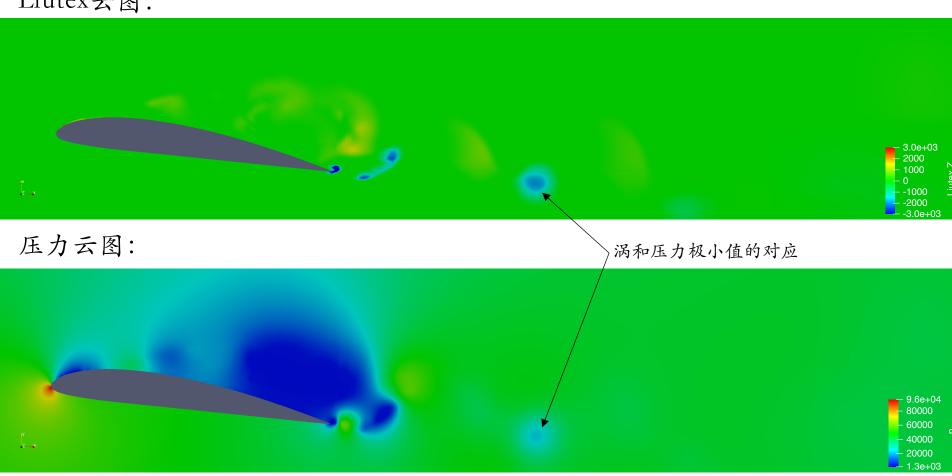
$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{R}}{2} \times \left(\frac{\boldsymbol{R}}{2} \times \boldsymbol{l}\right) = \frac{1}{4} \boldsymbol{R} \times (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{l})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) \pm \mathbf{a}$$

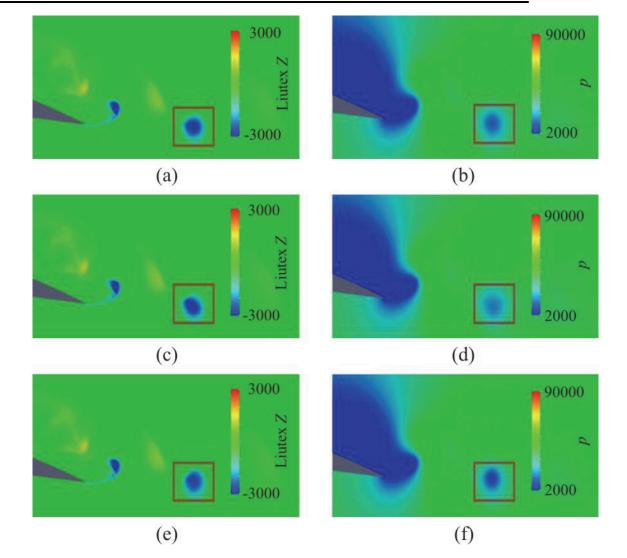


二维Clark-Y水翼空化数值模拟

Liutex云图:





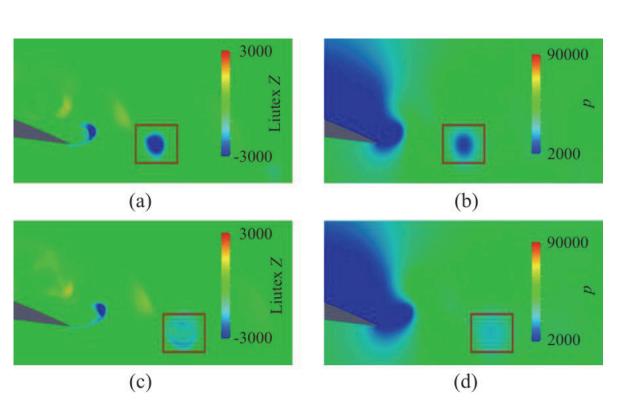


反旋力模型



$$U = \frac{R}{2} \times l$$

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\boldsymbol{U}}{\tau} = -\frac{1}{2\tau} \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{l}$$







Available online at https://link.springer.com/journal/42241 http://www.jhydrodynamics.com **Journal of Hydrodynamics**, 2020, 32(6): 1-5 https://doi.org/10.1007/s42241-020-0001-9



Liutex-based vortex dynamics: A preliminary study *

Hai-dong Yu¹, Yi-qian Wang²

- 1. School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China
- 2. School of Mathematical Science, Soochow University, Suzhou 215006, China

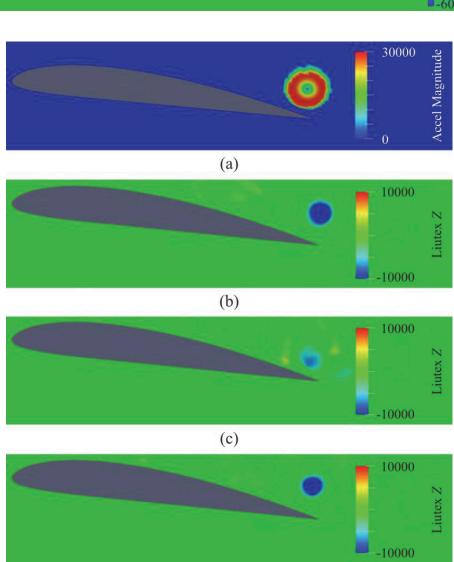
(Received December 15, 2020, Revised December 21, 2020, Accepted December 22, 2020, Published online 00, 2020)

©China Ship Scientific Research Center 2020

Abstract: Vortex dynamics, with the possibility of efficient flow control, is explored in this study based on the new introduced vortex definition and identification system of Liutex. With the six core elements of vortex identification, including: (1) absolute strength, (2) relative strength, (3) local rotational axis, (4) global rotation axis, (5) vortex core size and (6) vortex boundary, provided by the Liutex system, it is possible to numerically devise strategies, primarily by introducing additional source terms in Navier-Stokes equations, which we call Liutex force field model here, to control the vortex regions. Two methodologies of centripetal force model and counter-rotation force model are preliminarily investigated in a cavitating flow around two-dimensional Clark-Y hydrofoil. It is found that Liutex based models are capable of illustrating the vortex dynamics and possibly strengthening or weakening the vortices.

Key words: Vortex dynamics, Liutex vector, flow control





(d)



Thanks for Your Attention!

谢谢!

王义乾, yiqian@suda.edu.cn